RNDr. Ján ŠIMON, PhD.
e-mail: jan.simon@fstroj.uniza.sk
konzultácie: AD-107, KAM, SjF, ŽU

Domáca úloha č.16

Nekonečné funkcionálne rady

Nájdite obor bodovej konvergencie M funkcionálneho radu[1].

1. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$
2. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}$$
3. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \sin^n x}{n^2}$$
4. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} e^{-n \sin x}$$
5. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2 + \sqrt{n}}$$
6. $$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$$

Dokážte, že dané nekonečné funkcionálne rady rovnomerne konvergujú na danej množine M. Využite pri tom Weierstrassovo kritérium[2].

7. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1 + n^5 x^2}, \quad \mathrm{M} = \mathbb{R}$$
8. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + n^2}, \quad \mathrm{M} = \mathbb{R}$$
9. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}, \quad \mathrm{M} = \mathbb{R}$$
10. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx) + \sin^2(nx)}{n^{\frac{3}{2}}}, \quad \mathrm{M} = \mathbb{R}$$

[1] Funkcionálny rad $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ sa v konkrétnom bode x mení na rad číselný. Využite známe kritériá pre nekonečné číselné rady (porovnávacie, d'Alembertovo, Cauchyho, integrálne, Leibnizovo) aby ste zistili množinu všetkých x, v ktorých rad konverguje.

[2] Nech funkcionálny rad $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje bodovo na množine M a nech existuje postupnosť nezáporných čísel $a_n \geq f_n(x)$, ktoré pre $\forall x \in \mathrm{M}$ ohraničujú postupnosť funkcií zhora. Potom ak konverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, konverguje funkcionálny rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ podľa Weierstrassa *rovnomerne*.

11. $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}, \quad \mathrm{M} = \langle 0, \infty)$

Nájdite polomer konvergencie mocninového radu[3].

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n$

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{5^n} (x-1)^n$

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\ln n} (x-2)^n$

[3]Mocninový, alebo aj *potenčný* rad je špeciálny typ nekonečného funkcionálneho radu, ktorý sa často vyskytuje v praxi a má tvar $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$. Číslo x_0 sa nazýva stred mocninového radu a v tomto čísle rad vždy konverguje bodovo aj rovnomerne. Čísla a_n sú jeho koeficienty.
Vlastnosťou mocninových radov je, že ak bodovo konvergujú v čísle ξ, potom určite bodovo konvergujú aj vo všetkých číslach $|x - x_0| \leq |\xi - x_0|$. Vzdialenosť od stredu, v ktorej ešte mocninový rad konverguje nazývame *polomer konvergencie* a označujeme ho R.
Polomer konvergencie sa dá vypočítať viacerými spôsobmi. Buď z Cauchy-Hadamardovho vzťahu $R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$, alebo z d'Alembertovho kritéria $R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.
Mocninový rad konverguje rovnomerne na ktoromkoľvek intervale $\langle -\rho, \rho \rangle$, kde $0 < \rho < R$.